合肥市2021年高三第二次教学质量检测

数学试题（理科）参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	C	A	C	B	D	A	C	A	D	C

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$　　14. 25和15　　15. $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(n\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}$或$-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}$（二者填其一）

16. ①②④

三、解答题：本大题共6小题，满分70分.

17.（本小题满分12分）

解：(1)当$n\geq 2$时，$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$，

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=(n-2)\cdot 2^n+2$，

∴$na_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}-(n-2)\cdot 2^n=n\cdot 2^n$，∴$a_n=2^n$（$n\geq 2$）.

∵$n=1$，$a_1=2$，∴当$n=1$时，$a_n=2^n$也成立，

∴$a_n=2^n$（$n\in N^*$）.　　…………………………6分

(2)∵$b_n=\frac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}=\frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$，

∴$S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\left(\frac{1}{2^1+1}-\frac{1}{2^2+1}\right)+\left(\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{2^3+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$.

∵$n\in N^*$，∴$\frac{1}{2^{n+1}+1}>0$，∴$S_n<\frac{1}{3}$.　　…………………………12分

18.（本小题满分12分）

解：(1)随机变量X可以取到的值为0，1，2，3，所以

$P(X=0)=\frac{C_5^0C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}$，$P(X=1)=\frac{C_5^1C_3^2}{C_8^3}=\frac{15}{56}$，$P(X=2)=\frac{C_5^2C_3^1}{C_8^3}=\frac{15}{28}$，$P(X=3)=\frac{C_5^3C_3^0}{C_8^3}=\frac{5}{28}$，

∴用户数量X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$

∴X的期望为$EX=0\times\frac{1}{56}+1\times\frac{15}{56}+2\times\frac{15}{28}+3\times\frac{5}{28}=\frac{105}{56}=\frac{15}{8}$．………………6分

(2)用随机变量Y表示n名用户中年龄为30岁以上的用户数量，则事件“至少一名用户年龄为30岁以上”的概率为$P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)>\frac{1}{2}$，∴$P(Y=0)<\frac{1}{2}$，即$\left(\frac{9}{10}\right)^n<\frac{1}{2}$，

∴$n>\frac{\lg 2}{1-2\lg 3}$.

∵$\frac{\lg 2}{1-2\lg 3}\in(6,7)$，$n\in N^*$，∴$n$的最小值为7.　　………………………………12分

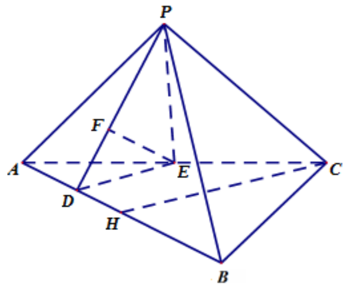
19. **(本小题满分 12 分)**

(1) 证明：如图，取 AB 的中点 H，连接 CH，DE，PE.

$\because BD=3AD$，$\therefore D$ 为 AH 的中点，$\therefore DE\,//\,CH$.

$\because AC=BC$，$\therefore CH\perp AB$，$\therefore ED\perp AB$.

又$\because$点 E 在平面 PAB 上的射影 F 在线段 PD 上，



$\therefore EF\perp$平面 PAB，$\therefore EF\perp AB$.

$\because EF\cap ED=E$，EF，$DE\subset$平面 PDE，

$\therefore AB\perp$平面 PDE，$\therefore AB\perp PE$.

$\because$点 E 为棱 AC 的中点，$PA=PC$，$\therefore PE\perp AC$.

又$\because AC\cap AB=A$，AC，$AB\subset$平面 ABC，

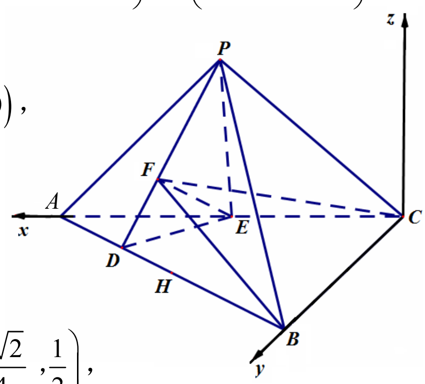
$\therefore PE\perp$平面 ABC. $\because PE\subset$平面 PAC，

$\therefore$平面 $PAC\perp$平面 ABC. ……………………………6 分

(2) $\because AC\perp BC$，$\therefore$以 C 为原点，以 $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$ 所在方向为 x，y 轴正方向建立空间直角坐标系，如图.

$\because PA=PC=\sqrt{3}$，$AC=BC=2\sqrt{2}$，$\therefore AB=4$，$CH=2$，$PE=DE=1$，F 为 PD 的中点，

$\therefore C(0,0,0)$，$B\left(0,2\sqrt{2},0\right)$，$E\left(\sqrt{2},0,0\right)$，$P\left(\sqrt{2},0,1\right)$，$D\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，$F\left(\frac{5\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}\right)$.



设平面 ECF 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\therefore \boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{EF}$，$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{EC}$，

$\therefore \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{EF}=0$，$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{EC}=0$. $\because \overrightarrow{EF}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{CE}=\left(\sqrt{2},0,0\right)$，

$\therefore\begin{cases}\sqrt{2}x=0,\\ \frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{4}y+\frac{1}{2}z=0.\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}_1=\left(0,\sqrt{2},-1\right)$.

设平面 BCF 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，$\therefore \boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{CB}$，$\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{FB}$，

$\therefore \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CB}=0$，$\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{FB}=0$. $\because \overrightarrow{CB}=\left(0,2\sqrt{2},0\right)$，$\overrightarrow{BF}=\left(\frac{5\sqrt{2}}{4},-\frac{7\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}\right)$，

$\therefore\begin{cases}2\sqrt{2}y_2=0,\\ \frac{5\sqrt{2}}{4}x_2-\frac{7\sqrt{2}}{4}y_2+\frac{1}{2}z_2=0.\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}_2=\left(2,0,-5\sqrt{2}\right)$，$\therefore\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{54}}=\frac{5}{9}$.

$\therefore$二面角 $E-CF-B$ 的正弦值为 $\sqrt{1-\cos^2<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>}=\frac{2\sqrt{14}}{9}$.

……………………………12 分

20. **(本小题满分 12 分)**

解：(1) 设椭圆的半焦距为 c，由题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ a+c=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ c=1.\end{cases}$，$\therefore b=\sqrt{3}$，

$\therefore$椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………5 分

(2) 由题意知，直线 l 的斜率不为 0，设其方程为 $x=my+n$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}x=my+n\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $\left(3m^2+4\right)y^2+6mny+3n^2-12=0$，

$\therefore y_1+y_2=-\frac{6mn}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{3n^2-12}{3m^2+4}$，$\Delta=(6mn)^2-4\left(3m^2+4\right)\left(3n^2-12\right)=48\left(3m^2-n^2+4\right)>0$.

$\because k_1=\frac{y_1}{x_1-2}$，$k_2=\frac{y_2}{x_2-2}$，

$\therefore k_1k_2=\frac{y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{y_1y_2}{(my_1+n-2)(my_2+n-2)}=\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+m(n-2)(y_1+y_2)+(n-2)^2}$

$$=\frac{\frac{3n^2-12}{3m^2+4}}{m^2\cdot\frac{3n^2-12}{3m^2+4}+m(n-2)\left(-\frac{6mn}{3m^2+4}\right)+(n-2)^2}=\frac{3n^2-12}{4(n-2)^2}=\frac{3(n+2)}{4(n-2)}=-\frac{9}{4}$$，解得$n=1$.

∴直线l的方程为$x=my+1$，直线l过定点(1，0)，此时，$y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$，

∴$|AB|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+m^2}\sqrt{\left(-\frac{6m}{3m^2+4}\right)^2+\frac{36}{3m^2+4}}$

$=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{\frac{144(m^2+1)}{(3m^2+4)^2}}=\frac{12(m^2+1)}{3m^2+4}=4\cdot\frac{3m^2+3}{3m^2+4}=4\left(1-\frac{1}{3m^2+4}\right)\geq 3$（当且仅当$m=0$时取等号），

∴$|AB|$的最小值为3. ……………………………………………12分

21.（本小题满分12分）

解：(1)因为$f'(x)=a(x+3)e^x-2(x+3)=(x+3)(ae^x-2)$

若$a\leq 0$，$ae^x-2<0$.

当$x\in(-\infty,-3)$时，$f'(x)>0$；当$x\in(-3,+\infty)$时，$f'(x)<0$.

∴当$a\leq 0$时，函数$f(x)$在$(-3,+\infty)$上单调递减，在$(-\infty,-3)$上单调递增.

若$a>0$，由$f'(x)=0$解得$x_1=-3$，$x_2=\ln\frac{2}{a}$.

①若$0<a<2e^3$，$\ln\frac{2}{a}>-3$.

当$x\in(-\infty,-3)\cup\left(\ln\frac{2}{a},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$；当$x\in\left(-3,\ln\frac{2}{a}\right)$时，$f'(x)<0$.

∴当$0<a<2e^3$时，函数$f(x)$在$(-\infty,-3)$，$\left(\ln\frac{2}{a},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(-3,\ln\frac{2}{a}\right)$上单调递减.

②若$a=2e^3$，$\ln\frac{2}{a}=-3$.

当$x\in\mathrm{R}$时，$f'(x)\geq 0$，∴函数$f(x)$在R上单调递增.

③若$a>2e^3$，$\ln\frac{2}{a}<-3$.

当$x\in\left(-\infty,\ln\frac{2}{a}\right)\cup(-3,+\infty)$时，$f'(x)>0$；当$x\in\left(\ln\frac{2}{a},-3\right)$时，$f'(x)<0$.

∴当$a>2e^3$时，函数$f(x)$在$\left(-\infty,\ln\frac{2}{a}\right)$，$(-3,+\infty)$上单调递增，在$\left(\ln\frac{2}{a},-3\right)$上单调递减. ……………6分

(2)当$a>\frac{1}{e}$时，要证$f(x-2)>\ln x-x^2-x-3$，即要证$axe^{x-2}>\ln x+x-2$，也即证$a>\frac{\ln x+x-2}{xe^{x-2}}$（$x>0$）.

令$g(x)=\frac{\ln x+x-2}{xe^{x-2}}$（$x>0$），则$g'(x)=\frac{(x+1)(3-\ln x-x)}{x^2e^{x-2}}$.

设$\varphi(x)=3-\ln x-x$，$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，$\varphi(1)>0$，$\varphi(3)<0$，

∴$\exists x_0\in(1,3)$，使得$\varphi(x_0)=3-\ln x_0-x_0=0$ (*).

当$x\in(0,x_0)$时，$g'(x)>0$；当$x\in(x_0,+\infty)$时，$g'(x)<0$.

∴$g(x)\leq g(x_0)=\frac{\ln x_0+x_0-2}{x_0e^{x_0-2}}=\frac{1}{x_0e^{x_0-2}}$.

由(*)知 $3-\ln x_0-x_0=0$，即$\ln x_0=3-x_0$，∴$e^{3-x_0}=x_0$，

∴$g(x_0)=\frac{1}{e^{3-x_0}\cdot e^{x_0-2}}=\frac{1}{e}$，∴$g(x)\leq\frac{1}{e}<a$，

∴当$a>\frac{1}{e}$时，$f(x-2)>\ln x-x^2-x-3$. ……………………………12分

22.（本小题满分 10 分）

解：(1) 由$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(t^{\frac{1}{4}}-t^{-\frac{1}{4}}\right), \\ y=\sqrt{2}\left(t^{\frac{1}{4}}+t^{-\frac{1}{4}}\right) \end{cases}$ 得$\begin{cases} \sqrt{2}x=t^{\frac{1}{4}}-t^{-\frac{1}{4}}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}y=t^{\frac{1}{4}}+t^{-\frac{1}{4}}. \end{cases}$，

两式平方相减得$\dfrac{1}{2}y^2-2x^2=4$，即$\dfrac{y^2}{8}-\dfrac{x^2}{2}=1$.

又∵ $y=\sqrt{2}\left(t^{\frac{1}{4}}+t^{-\frac{1}{4}}\right)\geq 2\sqrt{2}$ (t>0)，∴曲线C_1的直角坐标方程为$\dfrac{y^2}{8}-\dfrac{x^2}{2}=1\left(y\geq 2\sqrt{2}\right)$.

曲线C_2：$\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}=0$，$\rho\sin\theta-\rho\cos\theta-4=0$，即$y-x-4=0$，

∴曲线C_2的直角坐标方程为$x-y+4=0$. ……………………………5 分

(2) 设曲线C_2的参数方程为$\begin{cases} x=-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t. \end{cases}$（$t$ 为参数）.

代入曲线C_1方程得$\left(2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2-4\left(-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2=8$，即$3t^2-20\sqrt{2}t+40=0$.

$\triangle=320>0$. 设方程的两个实数根为t_1，t_2，则$t_1+t_2=\dfrac{20\sqrt{2}}{3}$，$t_1t_2=\dfrac{40}{3}$，

$$\therefore\left|\frac{1}{|MA|}-\frac{1}{|MB|}\right|=\left|\frac{1}{|t_1|}-\frac{1}{|t_2|}\right|=\frac{\left||t_2|-|t_1|\right|}{|t_1|\cdot|t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1|\cdot|t_2|}=\frac{\sqrt{\left(t_1+t_2\right)^2-4t_1t_2}}{|t_1|\cdot|t_2|}=\frac{\frac{8\sqrt{5}}{3}}{\frac{40}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

∴$\dfrac{1}{|MA|}-\dfrac{1}{|MB|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$或$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.　　　………………………………10 分

23.（本小题满分 10 分）

证明：(1) 由a，b，c都是正数得，$3=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$，∴$\sqrt[3]{abc}\leq 1$，即$abc\leq 1$，

∴$\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ac}=\dfrac{a+b+c}{abc}=\dfrac{3}{abc}\geq 3$，

即$\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ac}\geq 3$（当且仅当$a=b=c$等号成立）.　　　………………………………5 分

(2) ∵ $\dfrac{2}{a+\sqrt{bc}}+\dfrac{2}{b+\sqrt{ac}}+\dfrac{2}{c+\sqrt{ab}}\geq\dfrac{4}{2a+b+c}+\dfrac{4}{2b+a+c}+\dfrac{4}{2c+a+b}=\dfrac{4}{a+3}+\dfrac{4}{b+3}+\dfrac{4}{c+3}$，

又∵ $a+b+c=3$，$(a+3)+(b+3)+(c+3)=12$，

$$\therefore\frac{4}{a+3}+\frac{4}{b+3}+\frac{4}{c+3}=\frac{4}{12}\left[(a+3)+(b+3)+(c+3)\right]\left(\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(3+\frac{b+3}{a+3}+\frac{c+3}{a+3}+\frac{a+3}{b+3}+\frac{c+3}{b+3}+\frac{a+3}{c+3}+\frac{b+3}{c+3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[3+\left(\frac{b+3}{a+3}+\frac{a+3}{b+3}\right)+\left(\frac{c+3}{a+3}+\frac{a+3}{c+3}\right)+\left(\frac{c+3}{b+3}+\frac{b+3}{c+3}\right)\right]\geq 3,$$

∴$\dfrac{2}{a+\sqrt{bc}}+\dfrac{2}{b+\sqrt{ac}}+\dfrac{2}{c+\sqrt{ab}}\geq 3$（当且仅当$a=b=c$等号成立）. …………………………10 分